Exercice 06: Simulateur de vol

Pour simuler les conditions de vol des avions, les ingénieurs ont conçu un appareil spécial pour l'entraînement des pilotes qui consiste en **un bras *(1)*** en rotation dans le plan horizontal tel que : $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$: repère fixe ;

$R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$:repère mobile lié au bras, avec $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=\psi$ sens positif ;

Un cockpit (2) en rotation autour de l'axe $\vec{x}_1$ tel que $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1,\vec{y}_2)=(\vec{z}_1,\vec{z}_2)=\theta$ sens positif ; $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$: repère lié au cockpit avec ***OB = R.***

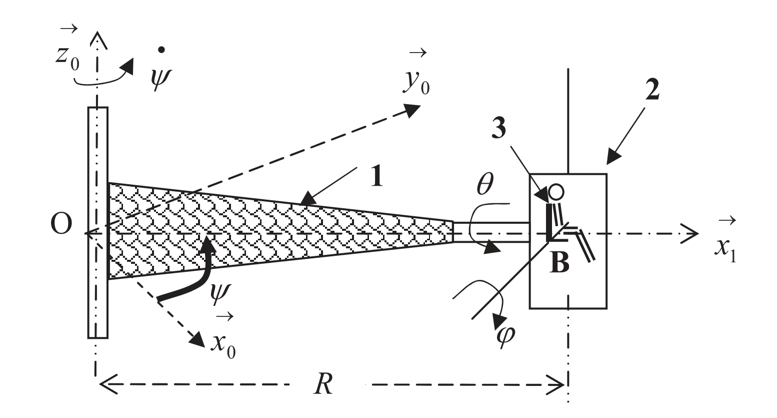
Un siège-pilote *(3)* en rotation autour de l'axe $\vec{y}_2$ tel que : $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2,\vec{x}_3)=(\vec{z}_2,\vec{z}_3)=\varphi$ sens positif. $R_3(B,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$: repère lié au siège-pilote. Le pilote est lié au siège, sa tête est repéré par le vecteur position $\overrightarrow{BT}=L\,\vec{z}_3$.

Tous ces éléments sont en rotation contrôlée par l'ordinateur pour simuler les différentes manœuvres. Il a fallu faire des calculs pour déterminer les paramètres cinématiques afin de les varier de façon sensée pour savoir à quelles accélérations seront soumis les pilotes.

Vous êtes l'ingénieur responsable de ces calculs, il vous est demandé de :

1) Etablir les figures planes représentatives des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;
2) Trouver le vecteur position du point ***T***, ainsi que le vecteur rotation du siège pilote par rapport à R_0;
3) Déterminer le vecteur vitesse absolue du point ***T*** par composition de mouvement et par la cinématique du solide.
4) Déterminer l'accélération absolue du point ***T*** par composition de mouvement.

On prendra R_2 comme repère de projection



Solution :

1. Figures planes des trois rotations et les matrices de passages correspondantes ;

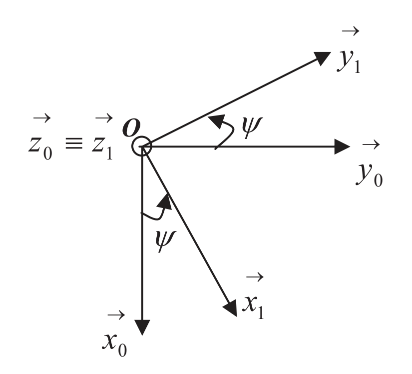
a) Rotation du bras

Nous avons : $OB = R$ et $R_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe. R_2 : étant le repère de projection on exprimera toute les données dans ce repère.

$R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$: en rotation / à R_0 tel que : $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ et $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \psi$ sens positif

Matrice de passage de R_0 *vers* R_1

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{R_0 \to R_1}} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix}$$

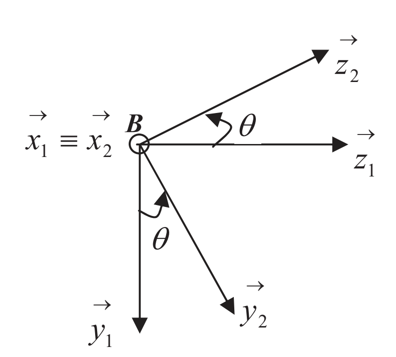


***a) Rotation du* cockpit**

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$: en rotation / R_1 tel que $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \theta$ sens positif ;

Matrice de passage de R_1 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{P_{R_1 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$

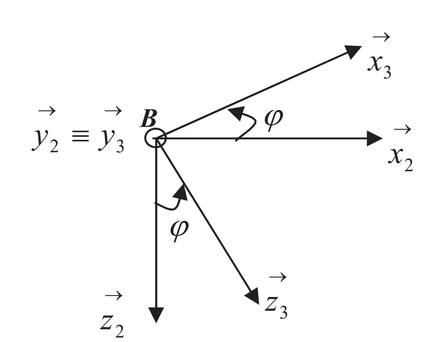


a) Rotation du siège pilote

$R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en rotation / tel que : $\vec{y}_2 \equiv \vec{y}_3$ et $(\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \varphi$ sens positif.

Matrice de passage de R_3 *vers* R_2

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{P_{R_3 \to R_2}} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}$$



2. Vecteur position du point T par rapport à R_0 exprimé dans R_2

Nous avons : $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BT}$, sachant que $\overrightarrow{BT} = L\,\vec{z}_3$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{cases} R \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1, R_2} \;;\; \overrightarrow{BT} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ L \end{cases}_{R_3} = \begin{cases} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} \quad \text{d'où : } \overrightarrow{OT} = \begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$$

Vecteur rotation du siège pilote :

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\psi}\,\vec{z}_1 \quad ;$$

Par la matrice de passage de R_1 vers R_2 le vecteur $\vec{z}_1$ ‘écrit : $\vec{z}_1 = \sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \dot{\varphi}\,\vec{y}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \dot{\psi}\left(\sin\theta\,\vec{y}_2 + \cos\theta\,\vec{z}_2\right) = \dot{\theta}\,\vec{x}_2 + \left(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta\right)\vec{y}_2 + \dot{\psi}\cos\theta\,\vec{z}_2$$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2}$$

3. Vecteur vitesse du point T

3.1. Par composition de mouvement

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{ent} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(T) = \vec{V}^2(T) + \vec{V}_2^0(T)$$

La vitesse relative est donnée par : $\vec{V}^2(T) = \dfrac{d^2\,\overrightarrow{BT}}{dt} \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}_{R_2}$

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}_2^0(T) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT}$

$$\vec{V}_2^0(T) = \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\left(R + L\sin\varphi\right) \\ -\dot{\psi}\sin\theta\left(R + L\sin\varphi\right) \end{cases}_{R_2}$$

En faisant la somme on obtient :

$$\vec{V}^0(T) = \left\{ \begin{array}{l} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{array} \right._{R_2}$$

3.2. Par la cinématique du solide

La vitesse relative s'écrit : $\vec{V}^0(T) = \vec{V}^0(B) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT}$

Nous avons : $\vec{V}^0(B) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OB} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{array} \right._{R_2} \wedge \left\{ \begin{array}{l} R \\ 0 \\ 0 \end{array} \right._{R_2} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\theta \\ -R\dot{\psi}\sin\theta \end{array} \right._{R_2}$

$$\vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{BT} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{array} \right._{R_2} \wedge \left\{ \begin{array}{l} L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{array} \right._{R_2} = \left\{ \begin{array}{l} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + L\dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \end{array} \right._{R_2}$$

La somme des deux expressions donne :

$$\vec{V}^0(T) = \left\{ \begin{array}{l} L\dot{\varphi}\cos\varphi + L\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{array} \right._{R_2}$$

4. Accélération absolue du point *T* par composition de mouvement

Son expression est donnée par la relation suivante : $\vec{\gamma}_{abs}(T) = \vec{\gamma}_{rel}(T) + \vec{\gamma}_{ent}(T) + \vec{\gamma}_{coriolis}(T)$

$\vec{\gamma}^0(T) = \vec{\gamma}^2(T) + \vec{\gamma}_2^0(T) + \vec{\gamma}_c(T)$

Explicitons chacun des termes de cette relation :

(1) : $$\vec{\gamma}^2(T) = \frac{d^2 \vec{V}^2(T)}{dt} \quad R_2\begin{cases} L\ddot{\varphi}\cos\varphi - L\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ 0 \\ -L\ddot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(T) = \vec{\gamma}^0(O) + \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OT} + \vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OT}\right)$$

$$\vec{\gamma}^0(O) = \vec{0}$$

$$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OT} = \frac{d^2\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OT} = R_2\begin{cases} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \wedge \quad R_2\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}$$

(2) : $$\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{OT} = R_2\begin{cases} L\cos\varphi\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \\ L\ddot{\theta}\cos\varphi + (R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\right) \\ -(R + L\sin\varphi)\left(\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OT}\right) = R_2\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \wedge \quad R_2\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \wedge \quad R_2\begin{cases} R + L\sin\varphi \\ 0 \\ L\cos\varphi \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\left(\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OT}\right) = R_2\begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases} \wedge \quad R_2\begin{cases} L\dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta \\ -L\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta(R + L\sin\varphi) \\ -\dot{\psi}\sin\theta(R + L\sin\varphi) \end{cases}$$

(3) : $\vec{\Omega}_2^0 \wedge \left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{OT} \right) = \begin{cases} -\dot{\psi}^2 (R + L\sin\varphi) + L\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta \\ \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta (R + L\sin\varphi) + L\dot{\psi}^2 \cos\varphi\cos\theta\sin\theta \\ -L\dot{\theta}^2\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta (R + L\sin\varphi) - L\dot{\psi}^2\cos\varphi\sin^2\theta \end{cases}_{R_2}$

$$\vec{\gamma}_c(T) = 2\left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(T) \right)$$

(4) : $\vec{\gamma}_c(T) = 2 \begin{cases} \dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} L\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \\ -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}_{R_2} = \begin{cases} -2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \\ 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi + 2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi \\ -2L\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi \end{cases}_{R_2}$

La somme de ces expressions donne l'accélération absolue du point T

$\vec{\gamma}^0(T) =$ **(1) +(2) +(3) + (4)**